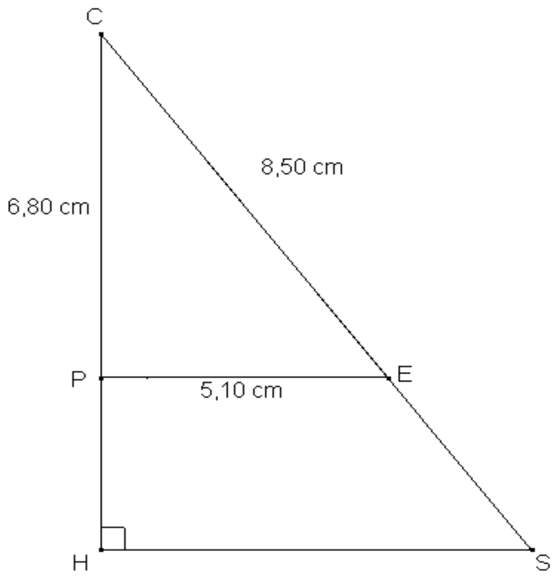
Devoir Maison de Mathématiques n°8

pour lundi 25février 2008

Exercice n°1 :

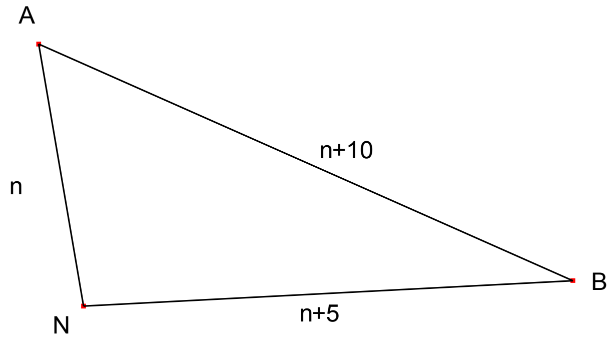
Considérons la figure suivante dans laquelle le triangle CHS est rectangle en H. On donne les longueurs suivantes : CP=6,8 cm ; PE=5,1 cm ; CE=8,5 cm ; et CH=10,2 cm.



1-Prouver que le triangle CPE est rectangle en P.
2-Prouver que les droites (PE) et (HS) sont parallèles.
3-Déterminer les longueurs des segments [HS] et [CS].
4-Déterminer la valeur exacte du cosinus de l'angle $\widehat{CEP}$ que l'on exprimera d'abord sous la forme d'une fraction irréductible, puis sous forme décimale ; en déduire une mesure de l'angle $\widehat{CEP}$ arrondie au dixième de degré près.
5-Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{HSC}$ sans faire aucun calcul, mais en justifiant la démarche.

Exercice n°2 :

Il existe un nombre entier « n » tel que le triangle suivant est rectangle en N. Ce nombre est compris entre zéro et vingt. Déterminer ce nombre. On justifiera la démarche. On pourra présenter les recherches dans un tableau synthétique, accompagné de sa légende explicative.
Une fois ce nombre déterminé, on tracera avec précision la figure correspondante dans la copie.



Exercice n°3 :

Voici deux expressions numériques :

$$A=(3x+5)^2-(5x-3)^2 \quad \text{et} \quad B=2x(7x+4)-8(2x-2)$$

1-Calculer les valeurs de A et de B lorsque x vaut zéro.
2-Même question lorsque x vaut $\dfrac{34}{15}$. Qu'est-on tenté de dire alors ?
3-Afin de trancher définitivement, développer, réduire et ordonner A puis B. A et B sont-elles des expressions égales ?
4-Est-ce que la valeur -5 est une solution de l'équation suivante ?

$$(3x+5)^2-(5x-3)^2=2x(7x+4)-8(2x-2)$$

(on mènera les calculs qui permettent de répondre afin d'éviter de dire uniquement « oui » ou « non »)

Correction :

Exercice 1 :

1.Dans le triangle CPE, on calcule :

$$CP^2+PE^2=6{,}8^2+5{,}1^2=46{,}24+26{,}01=72{,}25$$

$$CE^2=8{,}5^2=72{,}25$$

On constate que $CP^2+PE^2=CE^2$. D'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle CPE est donc rectangle en P.

2.On sait que les droites (PE) et (HS) sont perpendiculaires à la droite (CH). Or : Si deux droites sont perpendiculaires à la même troisième, alors elles sont parallèles entre elles. Donc (PE) et (HS) sont parallèles.

3.Dans le triangle CHS, on a :

-P sur [CH]

-E sur [CS]

-(PE) // (HS)

On peut donc appliquer la propriété de proportionnalité.

$$\frac{CP}{CH}=\frac{CE}{CS}=\frac{PE}{HS}$$

donc : $\frac{6{,}8}{10{,}2}=\frac{8{,}5}{CS}$ ce qui donne CS = 12,75

et : $\frac{6{,}8}{10{,}2}=\frac{5{,}1}{HS}$ ce qui donne HS = 7,65

4.Dans le triangle CPE, on calcule le cosinus de l'angle $\widehat{CEP}$:

$$\cos(\widehat{CEP})=\frac{côté\ adjacent}{hypoténuse}$$

$$\cos(\widehat{CEP})=\frac{PE}{CE}$$

$$\cos(\widehat{CEP})=\frac{5{,}1}{8{,}5}=\frac{51}{85}=\frac{3\times 17}{5\times 17}=\frac{3}{5}$$

$$\cos(\widehat{CEP})=0{,}6$$

donc $\widehat{CEP}$ mesure environ 53,1°.

5.Les droites (PE) et (HS) parallèles sont coupées par la sécante (CS). Cela détermine donc des angles correspondants égaux : $\widehat{CEP}$ et $\widehat{HSC}$. Donc $\widehat{HSC}$ mesure aussi environ 53,1°.

Exercice 2 :

Pour que le triangle ANB soit rectangle en N, il faut que l'égalité de Pythagore soit vérifiée, c'est-à-dire qu'il faut que AN^2+NB^2 soit égal à AB^2 . Cherchons pour quelle valeur de *n* cette égalité est vérifiée :

n	AN	NB	AN²	NB²	AN²+NB²	AB	AB²
1	1	6	1	36	37	11	121
2	2	7	4	49	53	12	144
3	3	8	9	64	73	13	169
4	4	9	16	81	97	14	196
5	5	10	25	100	125	15	225
6	6	11	36	121	157	16	256
7	7	12	49	144	193	17	289
8	8	13	64	169	233	18	324
9	9	14	81	196	277	19	361
10	10	15	100	225	325	20	400
11	11	16	121	256	377	21	441
12	12	17	144	289	433	22	484
13	13	18	169	324	493	23	529
14	14	19	196	361	557	24	576
15	15	20	225	400	**625**	25	**625**
16	16	21	256	441	697	26	676
17	17	22	289	484	773	27	729
18	18	23	324	529	853	28	784
19	19	24	361	576	937	29	841
20	20	25	400	625	1025	30	900

En couleur, les colonnes à comparer ; on obtient $AN^2+NB^2=AB^2$ lorsque n vaut 15.

Remarque : ce tableau se calcule en deux minutes avec l'aide d'un tableur !

Exercice 3 :

1.Lorsque x vaut zéro :

$$A=(3\times 0+5)^2-(5\times 0-3)^2$$
$$A=5^2-(-3)^2$$
$$A=25-9$$
$$A=16$$

$$B=2\times 0\times(7\times 0+4)-8\times(2\times 0-2)$$
$$B=0-8\times(-2)$$
$$B=16$$

2.Lorsque x vaut $\frac{34}{15}$:

$$A=\left(3\times\frac{34}{15}+5\right)^2-\left(5\times\frac{34}{15}-3\right)^2$$
$$A=\left(\frac{34}{5}+\frac{5}{1}\right)^2-\left(\frac{34}{3}-\frac{3}{1}\right)^2$$
$$A=\left(\frac{34}{5}+\frac{25}{5}\right)^2-\left(\frac{34}{3}-\frac{9}{3}\right)^2$$
$$A=\left(\frac{59}{5}\right)^2-\left(\frac{25}{3}\right)^2$$
$$A=\frac{3481}{25}-\frac{625}{9}$$
$$A=\frac{3481\times 9}{25\times 9}-\frac{625\times 25}{25\times 9}$$
$$A=\frac{31329}{225}-\frac{15625}{225}$$

$$B=2\times\frac{34}{15}\times\left(7\times\frac{34}{15}+4\right)-8\times\left(2\times\frac{34}{15}-2\right)$$
$$B=\frac{68}{15}\times\left(\frac{238}{15}+\frac{4}{1}\right)-8\times\left(\frac{68}{15}-\frac{2}{1}\right)$$
$$B=\frac{68}{15}\times\left(\frac{238}{15}+\frac{60}{15}\right)-8\times\left(\frac{68}{15}-\frac{30}{15}\right)$$
$$B=\frac{68}{15}\times\frac{298}{15}-8\times\frac{38}{15}$$
$$B=\frac{20264}{225}-\frac{304}{15}$$
$$B=\frac{20264}{225}-\frac{304\times 15}{15\times 15}$$
$$B=\frac{20264}{225}-\frac{4560}{225}$$

$A = \frac{15704}{225}$ $B = \frac{15704}{225}$

On dirait que A et B sont des expressions égales puisqu'elles viennent de donner le même résultat à deux reprises pour deux valeurs différentes de *x*.

3.Développer A et B :

$A = (3x+5) \times (3x+5) - (5x-3) \times (5x-3)$
$A = [9x^2 + 15x + 15x + 25] - [25x^2 - 15x - 15x + 9]$
$A = 9x^2 + 30x + 25 - 25x^2 + 30x - 9$
$A = -16x^2 + 60x + 16$

$B = 2x(7x+4) - 8(2x-2)$
$B = 14x^2 + 8x - 16x + 16$
$B = 14x^2 - 8x + 16$

On voit clairement ici que A et B sont deux expressions différentes mais qui donnent des valeurs identiques lorsque *x* vaut zéro et aussi lorsque *x* vaut $\frac{34}{15}$ (quel hasard quand même !!)

4.Est-ce que la valeur -5 est une solution de l'équation suivante ?

$$\underbrace{(3x+5)^2 - (5x-3)^2}_{A} = \underbrace{2x(7x+4) - 8(2x-2)}_{B}$$

Cette question peut être reformulée de la façon suivante : A et B sont-elles égales lorsque *x* vaut -5 ?
Pour répondre, on calcule A puis B avant de comparer les résultats :

$A = -16 \times (-5)^2 + 60 \times (-5) + 16 = -16 \times 25 - 300 + 16 = -400 - 300 + 16 = -684$
$B = 14 \times (-5)^2 - 8 \times (-5) + 16 = 14 \times 25 + 40 + 16 = 350 + 56 = 406$

A et B n'ont pas la même valeur lorsque *x* vaut (-5) ; donc (-5) n'est pas solution de l'équation proposée.