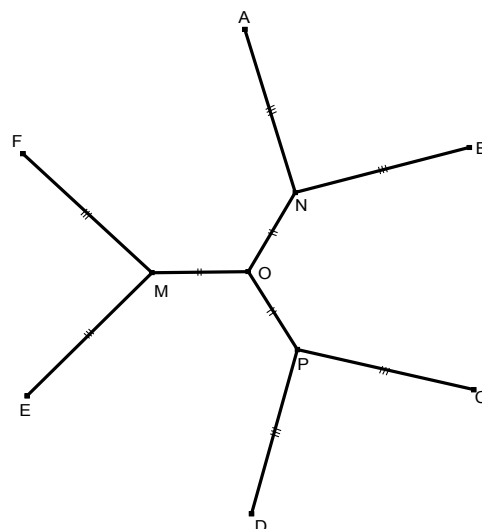


Devoir Maison de Mathématiques n°13 Classe de 3°

On souhaite connecter six villages A, B, C, D, E et F disposés aux sommets d'un hexagone régulier de côté 10 km à un unique château d'eau construit au centre de cet hexagone, comme le montre la figure ci-contre. Pour minimiser l'investissement financier, la longueur totale de tuyau à mettre en œuvre sera la plus courte possible. L'objectif est de déterminer une valeur la plus précise possible de cette longueur de tuyau minimale.



Partie 1 : étude géométrique assistée par informatique

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (comme Geogebra, Cabri, Graphix, ...), modéliser cette situation. Construire une figure conforme à l'énoncé, dans laquelle un des points (M, par exemple) sera mobile et servira à la manipuler. Les points N et P doivent bouger « en même temps » que M. Le logiciel devra calculer la longueur totale de tuyau nécessaire. Une fois la figure construite, placer le point (M si c'est celui choisi) à l'endroit où la longueur de tuyau est minimale et *enregistrer* la figure. On lui donnera un nom significatif du genre « DM13_NomEleve.ggb » et on l'enverra à mon adresse pour correction : prof_de_math@hotmail.fr
Nota : ceux qui ne disposent pas de l'usage d'un ordinateur doivent venir se signaler afin de se faire ouvrir une salle informatique au collège, mais pas à la dernière minute !

Partie 2 : étude numérique assistée par informatique

Soit un triangle équilatéral OAB de 10 cm de côté, et H le milieu du côté [AB]. Tracer le segment [OH] et y placer un point N. Tracer enfin les segments [NA] et [NB].

1- Quel est le rapport entre cette figure et la précédente ?

2- Quelle est la nature du triangle OHA ? Justifier.

3- Calculer la valeur exacte simplifiée de la longueur OH.

4- Appeler x la distance entre O et N. Exprimer la longueur NH en fonction de x .

5- Calculer la valeur exacte de AN^2 , puis de AN en fonction de x .

6- Voici une ébauche d'une feuille de calcul :

a) que doivent contenir les cellules de la colonne A à partir de la 3° ligne pour ne pas avoir à les remplir manuellement ?

b) jusqu'à quelle valeur devrait aller cette colonne ?

c) Quelle formule doit contenir la cellule B3 pour qu'elle se calcule en fonction de la cellule A3 ?

d) Quelle formule doit contenir la cellule C3 pour qu'elle se calcule seule ?

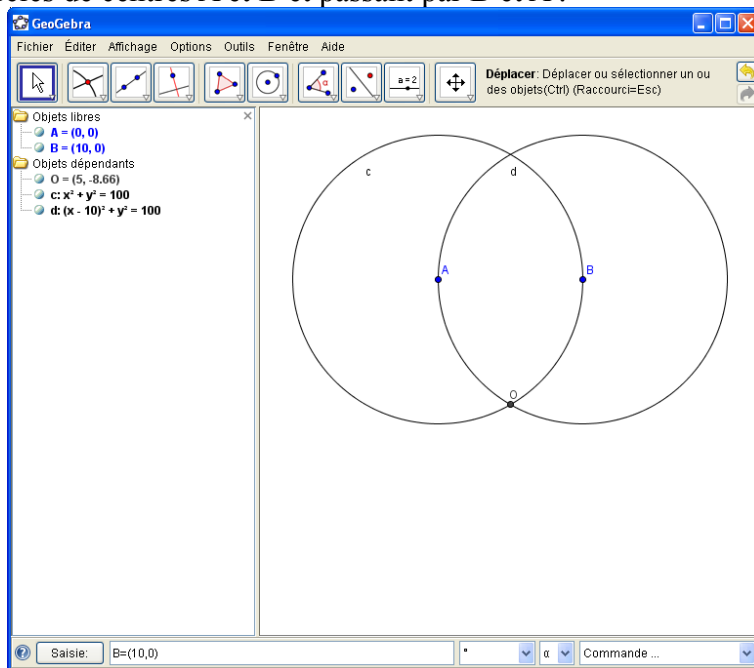
e) à l'aide d'un tableur, reconstituer cette feuille de calcul et la compléter. Mettre des couleurs. Mettre en valeur les cellules qui permettent de résoudre le problème. On pourra même construire un graphique qui montre l'évolution de la longueur de tuyau en fonction de la position de N, l'imprimer et le coller. On n'oubliera pas de conclure sur la copie. Une fois terminée, *enregistrer* cette feuille de façon similaire à la partie 1, et l'envoyer.

C26		f(x)	Σ	=	
	A	B	C	D	
1	distance NO	distance NA	longueur totale de tuyau		
2	0	10	60		
3	0,1				
4	0,2				
5	0,3				
6	0,4				
7	0,5				
8	0,6				
9	0,7				
10					
11					

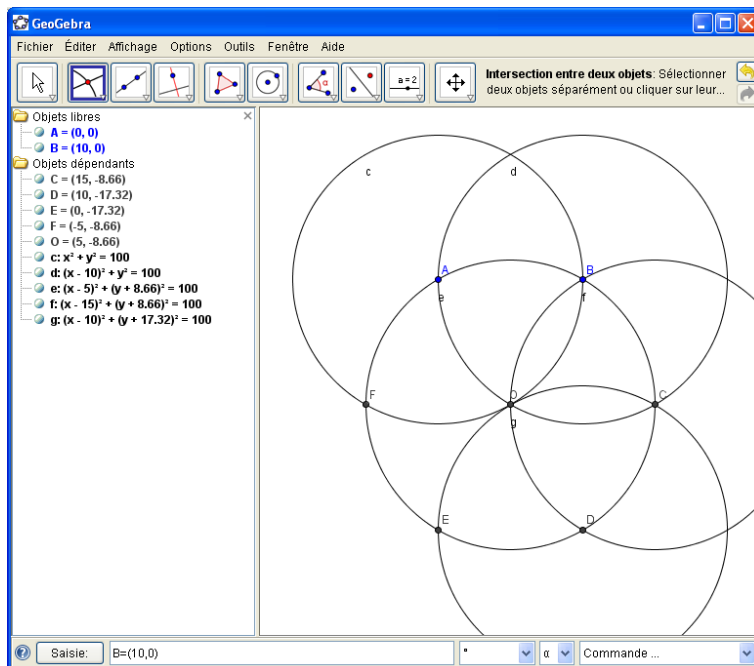
Correction :

Partie 1 : Construction de la figure avec Geogebra :

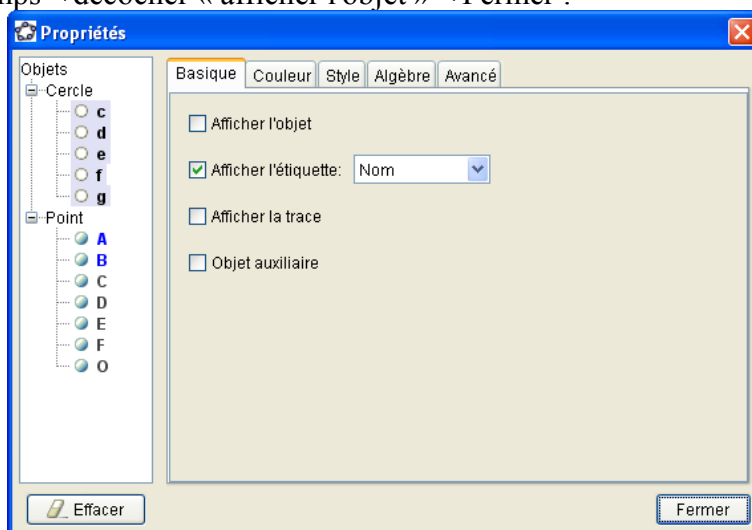
On commence par placer deux points A et B en donnant des coordonnées : (0 ; 0) pour A et (10 ; 0) pour B (voir ligne de saisie). De cette façon, l'hexagone aura un côté de 10 unités de long. Ce sont les deux seuls points qui seront placés de cette manière ; en effet, les coordonnées des autres points ne sont pas des nombres entiers, ni décimaux pour la plupart : ce sont des nombres irrationnels (des racines carrées). Les autres points doivent donc être placés par construction géométrique, en traçant cercles, droites, intersections... Commençons par déterminer le centre de cette figure : c'est l'intersection des cercles de centres A et B et passant par B et A :



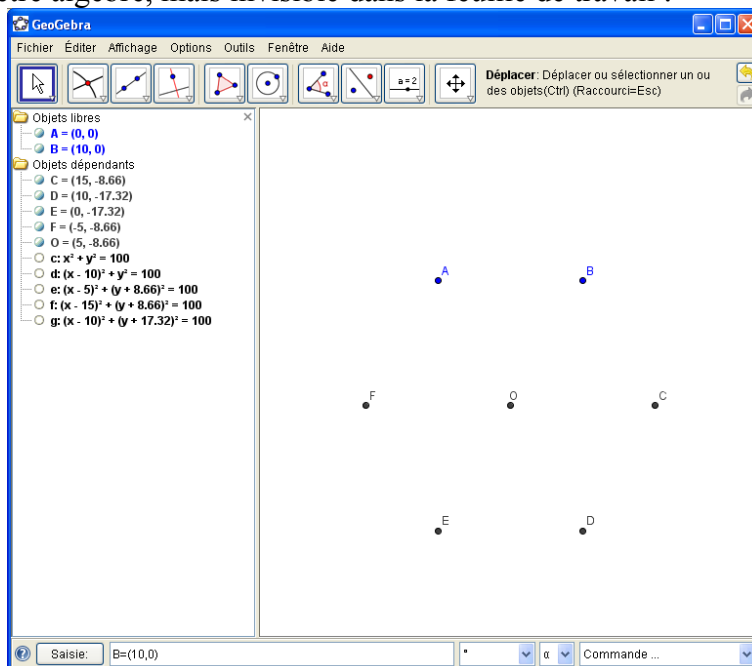
Ensuite, on construit tous les autres sommets de cet hexagone, comme on construirait une rosace avec son compas :



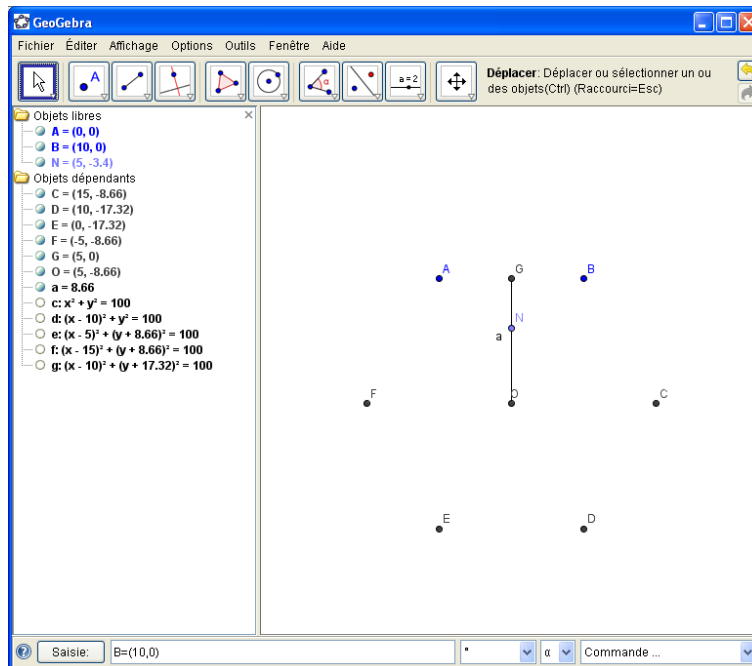
Afin de rendre plus lisible cette figure, on « cache » les cercles qui ont servi à la construction ; il ne faut pas les supprimer, sinon on supprime aussi les points qui ont été créés à partir des intersections de ces cercles ! Pour cela, clic droit dans le volet « algèbre » → propriétés → sélectionner tous les cercles en même temps → décocher « afficher l'objet » → Fermer :



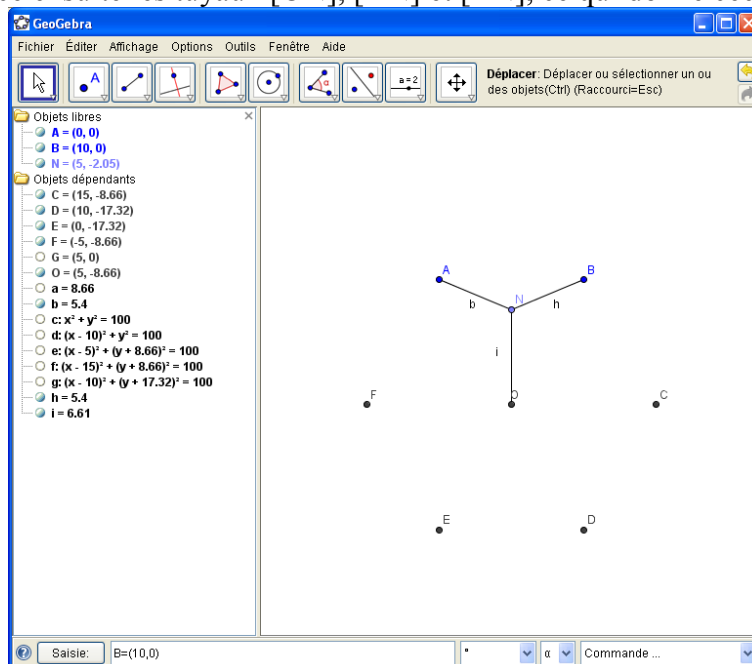
On obtient donc cette configuration, dans laquelle on remarque que les cercles sont toujours présents dans la fenêtre algèbre, mais invisible dans la feuille de travail :



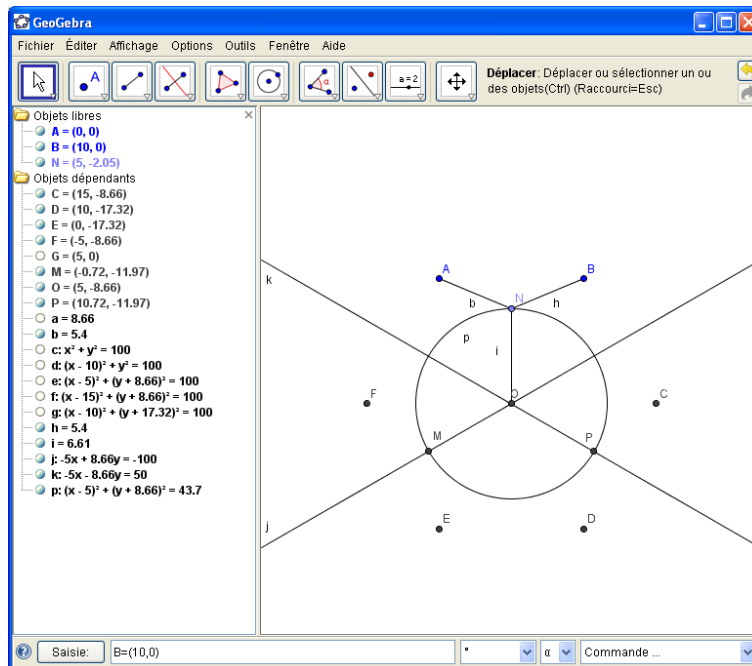
Il faut maintenant construire les points M, N et P. Dans cette correction, je choisis que le point qui entrainera les autres sera le point N. Commençons donc par le créer, mais pas n'importe où ! Il est sur la partie de la médiatrice de [AB] comprise entre O et le milieu de [AB]. Il faut donc construire ce segment, de O jusqu'au milieu de [AB], puis placer N dessus :



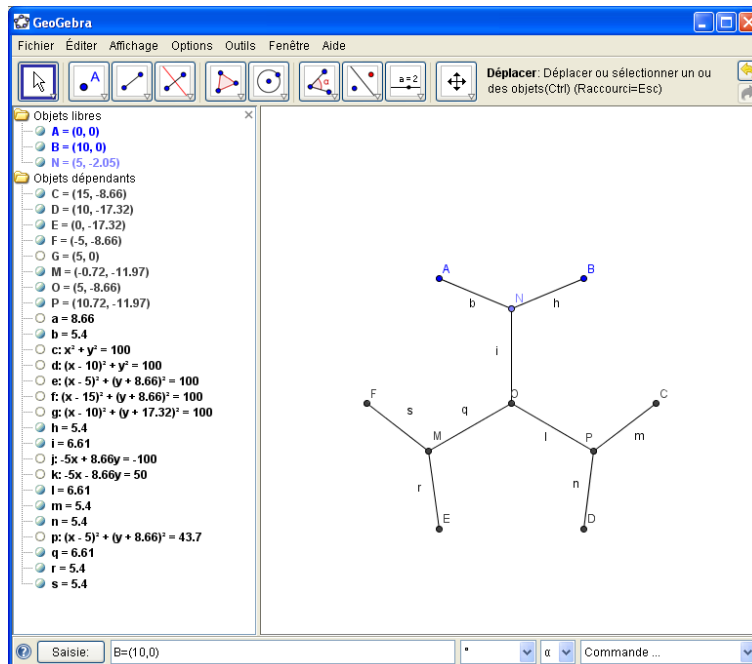
Ici, le milieu de $[AB]$ a été automatiquement appelé G. On peut laisser ce nom, puisqu'il n'est pas présent dans l'énoncé et aussi puisqu'on cachera immédiatement ce point et le segment (a) qu'il a servi à créer. On trace ensuite les tuyaux $[ON]$, $[AN]$ et $[BN]$, ce qui donne ceci :



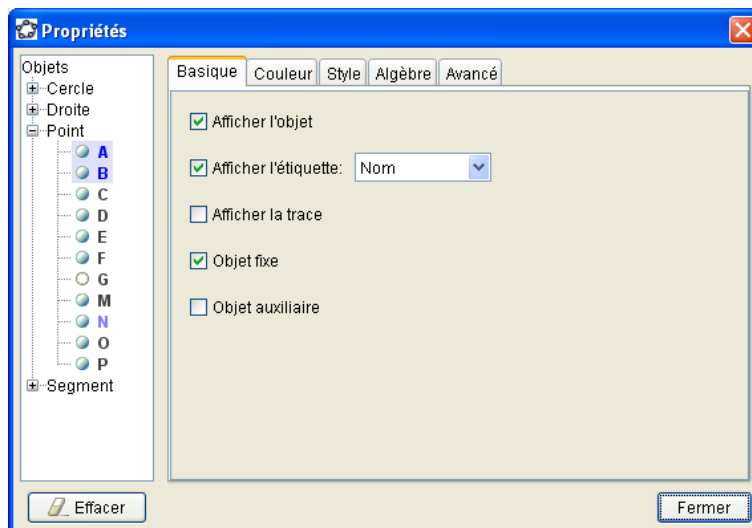
Il ne reste plus qu'à faire tracer les points M et P, mais situés à la même distance de O que N. Pour cela, on tracera la médiatrice de $[EF]$, celle de $[CD]$ et le cercle de centre O passant par N. Les intersections de ce dernier cercle avec les médiatrices sont les points M et P (à noter qu'il y a à chaque fois deux intersections, et qu'il faut choisir les bonnes) :



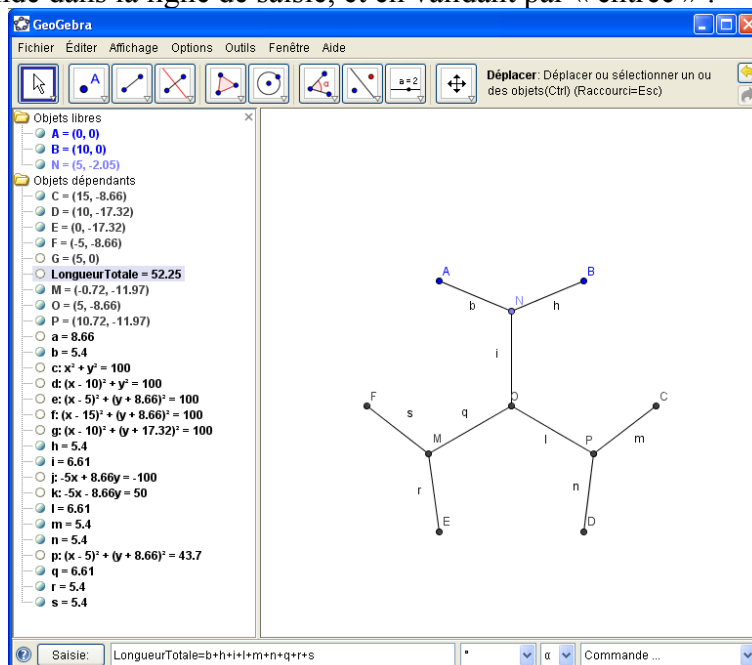
Il ne reste plus qu'à cacher médiatrices et cercle, et à tracer les tuyaux manquants pour obtenir la figure finale :



À ce stade, on contrôle que les points M et P bougent lorsqu'on manipule le point N. On remarque aussi que les seuls points qui sont manipulables sont A, B et N. En effet, tous les autres ont été construits à partir de ces trois points ; ils sont « dépendants » de A, de B et de N. Afin de ne pas modifier par inadvertance la taille de la figure (la distance entre A et B), il est recommandé de « fixer » ces deux points (ce qui a pour effet de les « scotcher », de les rendre immobiles) : clic droit sur l'un d'eux → propriétés → sélectionner les deux points en même temps → cocher « objet fixe » → Fermer :



Dès lors, le seul point manipulable sera le point N, et il entrainera avec lui M et P. Le seul détail manquant est alors la longueur totale des segments (tuyaux) de cette figure. Il suffit de demander poliment : « s'il te plaît, Geogebra, fais la somme des longueurs des segments qui m'intéressent », en tapant la commande dans la ligne de saisie, et en validant par « entrée » :



La longueur totale apparaît alors dans la fenêtre algébrique avec son nom (qui ne doit pas contenir d'espace). On remarque qu'il suffit d'indiquer la somme des noms des segments constituant cette figure. Geogebra assimile le nom du segment et sa longueur (enfin c'est un peu plus compliqué, mais ça marche comme ça !).

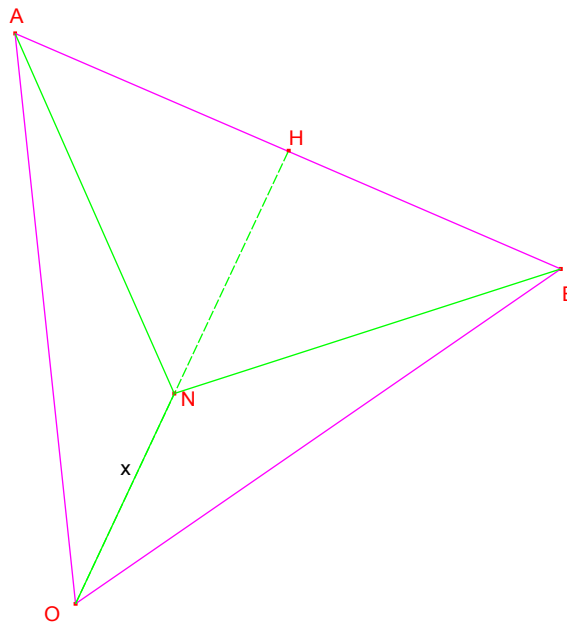
Il ne reste plus qu'à s'amuser à manipuler N pour trouver la position la plus favorable, celle qui minimise la longueur de tuyau.

[Ma construction ici...](#)

PS : une fois cette position favorable déterminée, ne remarquez-vous rien dans la disposition de tous les segments de la figure ? Cette forme ne vous rappelle-t-elle pas une forme bien connue ?



Partie 2 : Résolution calculatoire avec un tableur



1) Il s'agit ici d'une partie de la figure déjà étudiée précédemment. En effet, un hexagone régulier est constitué de six triangles équilatéraux. Cependant, dans cette figure sont présents un tiers des tuyaux de la figure initiale.

2) Le triangle OAB étant équilatéral, et H étant le milieu du côté [AB], (OH) est une médiane ; mais aussi une médiatrice, une hauteur et une bissectrice. Le triangle OHA est donc rectangle en H.

3) Dans le triangle OHA, rectangle en H, on utilise la propriété de Pythagore :

$$AO^2 = AH^2 + OH^2$$

$$\text{donc } 100 = 25 + OH^2$$

$$\text{et } OH = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

4) Comme N appartient au segment [OH] alors $NH = OH - ON = 5\sqrt{3} - x$

5) Dans le triangle AHN, rectangle en H, on applique la propriété de Pythagore :

$$AN^2 = AH^2 + HN^2$$

$$\text{donc } AN^2 = 25 + (5\sqrt{3} - x)^2$$

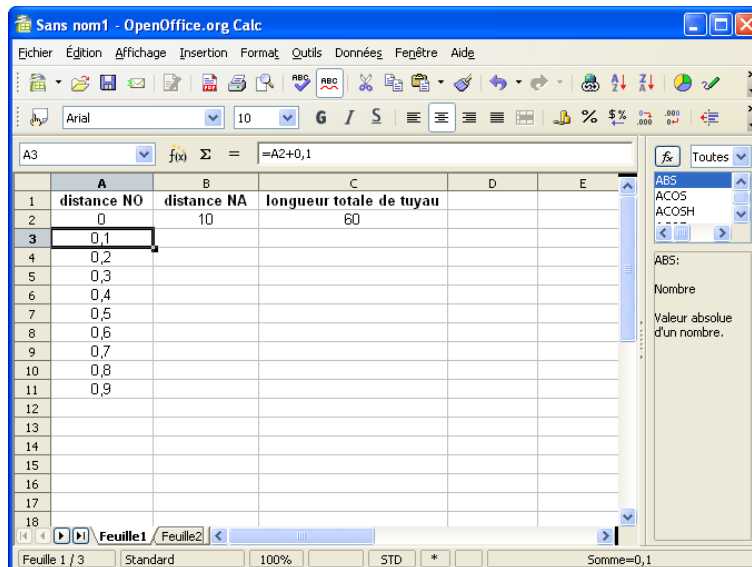
$$\text{soit } AN^2 = 25 + 25 \times 3 - 2 \times 5\sqrt{3} \times x + x^2 \quad (\text{développement avec une identité remarquable})$$

$$\text{d'où : } AN^2 = x^2 - 10x\sqrt{3} + 100$$

$$\text{et donc, pour finir : } AN = \sqrt{x^2 - 10x\sqrt{3} + 100}$$

6) La feuille de calcul :

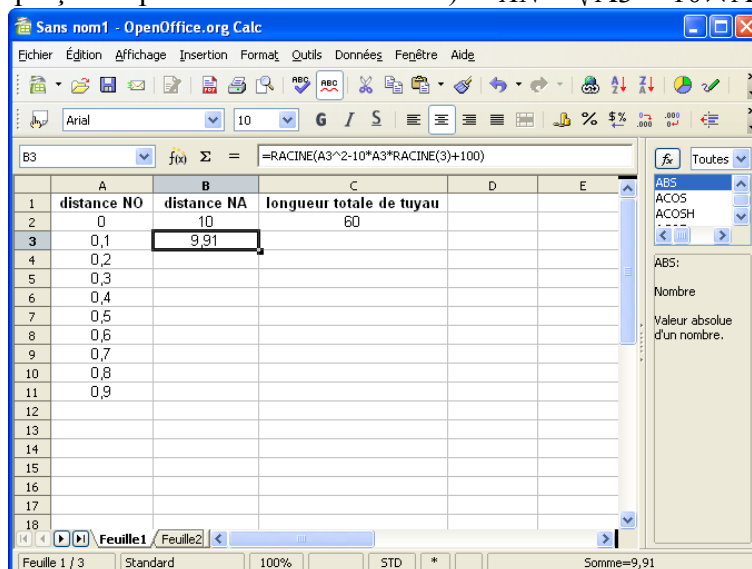
a) La première colonne peut s'incrémenter automatiquement en disant à chaque cellule qu'elle est obtenue en ajoutant 0,1 à la précédente :



Dans cette image, observer le champ de saisie : la cellule A3 vaut la cellule A2 + 0,1

b) Pour remplir entièrement cette colonne, il suffit de « copier-coller » la cellule A3 vers le bas. Comme le segment [OH] mesure $5\sqrt{3} \approx 8,66$, on va pouvoir compléter cette colonne jusqu'à la valeur 8,6.

c) La première colonne joue le rôle de x ; la distance NA doit donc se calculer à partir de x en respectant la formule de la question 5 : $AN = \sqrt{x^2 - 10x\sqrt{3} + 100}$
ce qui donne (en remplaçant x par le numéro de cellule) : $AN = \sqrt{A3^2 - 10 \times A3 \times \sqrt{3} + 100}$:



Dans cette image, observer le champ de saisie.

Pour remplir entièrement la colonne B, on « copie-collé » la cellule B3 vers le bas.

d) La cellule C3 contient la longueur totale de tuyau, soit (pour la figure complète du début) six fois la longueur NA et trois fois la longueur OH : $C3 = 6 \times B3 + 3 \times A3$:

	A	B	C	D	E
1	distance NO	distance NA	longueur totale de tuyau		
2	0	10	60		
3	0,1	9,91	59,78		
4	0,2	9,83			
5	0,3	9,74			
6	0,4	9,66			
7	0,5	9,57			
8	0,6	9,49			
9	0,7	9,4			
10	0,8	9,32			
11	0,9	9,23			
12	1	9,15			
13	1,1	9,06			
14	1,2	8,98			
15	1,3	8,9			
16	1,4	8,82			
17	1,5	8,73			
18	1,6	8,65			

Dans cette image, observer le champ de saisie.

Pour remplir entièrement la colonne C, on étire la cellule C3 vers le bas.
On peut alors accéder à la position idéale du point N.

Pour mon fichier tableur, cliquer ici ☺

On peut aussi faire tracer un graphique montrant l'évolution de la longueur en fonction de l'emplacement de N :

Evolution de la longueur de tuyau en fonction de la position de N

