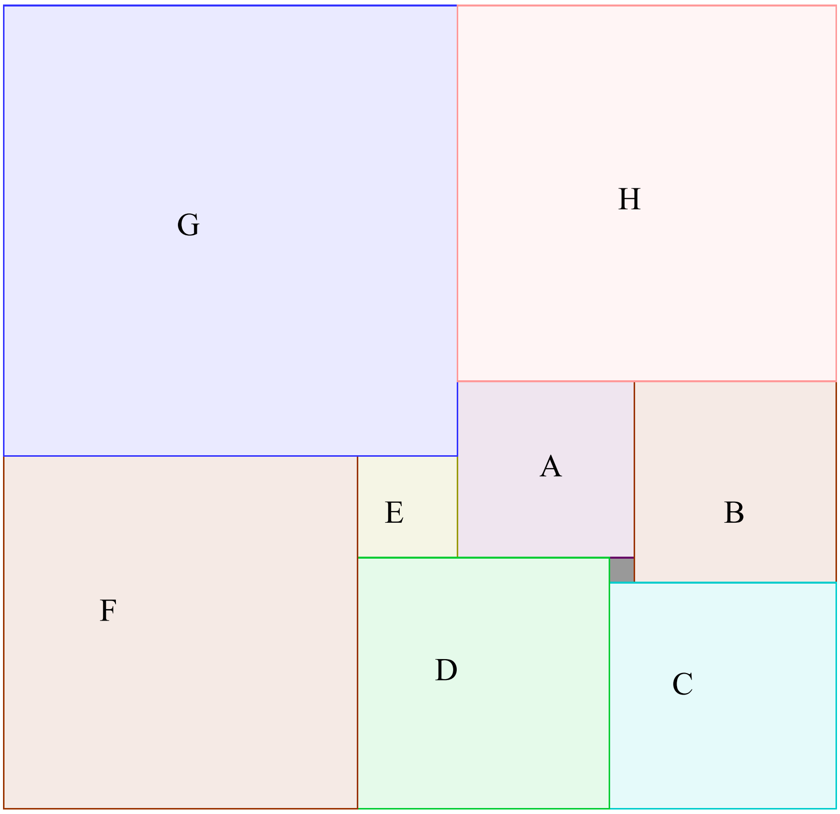
DM12 de Mathématiques

Pour le lundi 21 avril 2008

Exercice 1 :



Il paraît qu'on peut construire un rectangle avec uniquement des carrés comme le montre la figure ci-dessus. Sachant que le plus petit carré a comme côté 1 unité, quelles sont les dimensions du rectangle ?

NB : La figure n'est pas tracée à l'échelle. De plus, elle est déformée par la photocopie.

PS : Il faut expliquer la démarche qui conduit à la réponse.

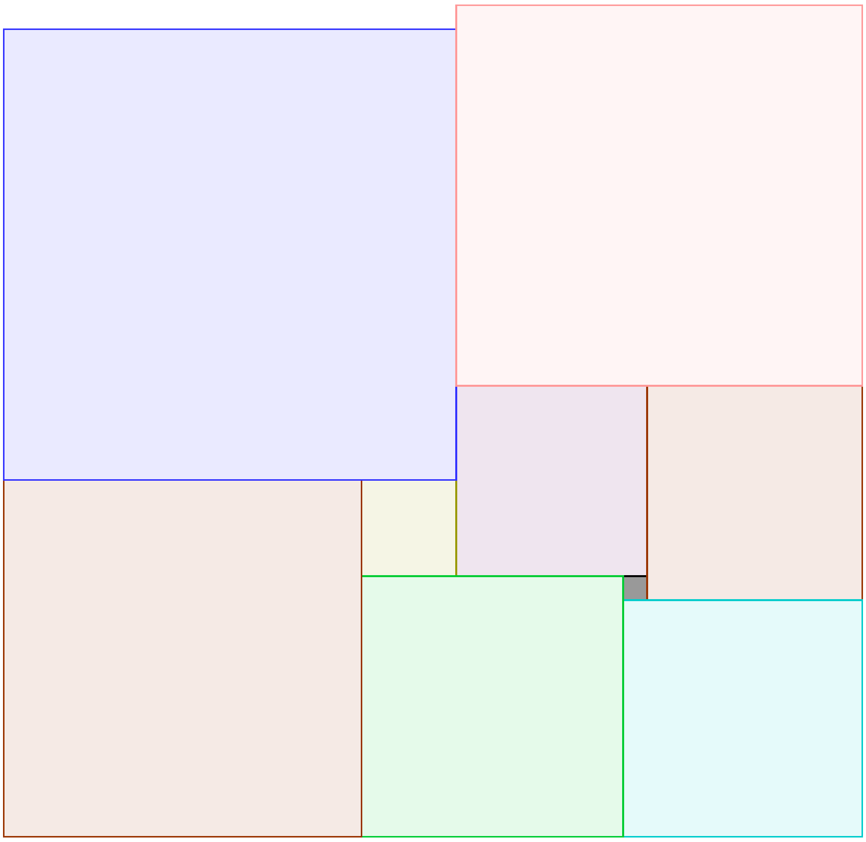
Exercice 2 :

Dans un repère orthonormé, placer les quatre points suivants :
A(3;5), B(-1;-3), C(5;-6) et D(9;2)
1-Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2-Calculer les valeurs exactes des longueurs AC et BD.
3-En déduire la nature précise du quadrilatère ABCD.
4-Soit G le centre du quadrilatère ABCD. Calculer ses coordonnées.
5-Soit F l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{GD}$. Calculer ses coordonnées.
6-Quel est la nature précise du quadrilatère AGDF ? Justifier.

Correction :

Exercice 1:

Le risque, en choisissant mal la longueur du premier carré, est d'arriver à une situation où l'assemblage de tous les carrés ne donne pas un rectangle, comme le montre la figure suivante :



L'idée est donc de déterminer une équation dont l'inconnue serait la taille du premier carré (A) et qui traduirait le fait que le carré H arrive à la même hauteur que le carré G.

Carré étudié	Longueur de son côté	Explications
A	x	C'est l'inconnue qu'on s'est fixée
B	$x+1$	B dépasse de A de 1 unité (le carreau gris)
C	$x+2$	C dépasse de B de 1 unité (le carreau gris)
D	$x+3$	D dépasse de C de 1 unité (le carreau gris)
E	4	côté(E) + côté(A) = côté(D) + carreau gris
F	$x+7$	C'est D+E
G	$x+11$	C'est F+E
H	$2x+1$	C'est A+B

Maintenant, il ne reste plus qu'à écrire l'équation. Seulement, les carrés G et H n'ont pas une origine commune. Par contre, E et A ont un sommet commun. L'équation traduira donc le fait que G et H doivent arriver à la même hauteur à partir du sommet commun de E et A :
En quelque sorte : E+G = A+H

Ceci se traduit par l'équation :
$4+x+11=x+2x+1$
Cette équation a pour solution la valeur 7. On peut donc en déduire les côtés de tous les carrés qui forment le rectangle :

A	B	C	D	E	F	G	H
7	8	9	10	4	14	18	15

On en déduit donc les dimensions du rectangle :
Longueur = 18 + 15 = 33
Largeur = 18 + 14 = 32

Exercice 2 :

1-Vecteurs :

$\overrightarrow{BA}(x_A-x_B\,;y_A-y_B)$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{CD}(x_D-x_C\,;y_D-y_C)$

$\overrightarrow{BA}(-3-1\,;-5-3)$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{CD}(9-5\,;2-(-6))$

$\overrightarrow{BA}(4\,;8)$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{CD}(4\,;8)$

2-Longueurs

$AC^2=(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2$ $\quad\quad$ $BD^2=(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2$

$AC^2=(5-3)^2+(-6-5)^2$ $\quad\quad$ $BD^2=(9-(-1))^2+(2-(-3))^2$

$AC^2=4+121=125$ $\quad\quad$ $BD^2=100+25=125$

$AC=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ $\quad\quad$ $BD=5\sqrt{5}$

3-Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ayant les mêmes coordonnées, ils sont égaux. Ce qui signifie que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. De plus, les segments [AC] et [BD] ont la même longueur ; ces deux segments sont les diagonales du parallélogramme ABCD. C'est donc un rectangle.
4-Le centre G d'un rectangle est le milieu d'une de ses diagonales. Prenons donc G comme milieu de [AC] :

$$x_G=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{3+5}{2}=4$$

$$y_G=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{5+(-6)}{2}=\frac{-1}{2}$$

5-F étant l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{GD}$, on peut dire que les vecteurs $\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont égaux, donc qu'ils ont les mêmes coordonnées :

$\overrightarrow{GD}(x_D-x_G\,;y_D-y_G)$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AF}(x_F-x_A\,;y_F-y_A)$

$\overrightarrow{GD}\left(9-4\,;2-(\frac{-1}{2})\right)$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AF}(x_F-3\,;y_F-5)$

$\overrightarrow{GD}\left(5\,;\frac{5}{2}\right)$

d'où les deux équations suivantes : $\begin{cases} x_F-3=5 \\ y_F-5=\dfrac{5}{2} \end{cases}$ et donc : $F\left(8\,;\dfrac{15}{2}\right)$

6- F étant l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{GD}$, on peut dire que le quadrilatère AGDF est déjà un parallélogramme. De plus, ses deux côtés [AG] et [GD] sont deux demi-diagonales du rectangle ABCD, donc ont la même longueur. Le parallélogramme AGDF a donc deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un losange.