DM de Mathématiques n°10

3°4 pour vendredi 14 mars 2008

Exercice :

Nota : il est fortement conseillé de traiter cet exercice avant de vouloir résoudre la seconde partie du problème.

Soit E l'expression suivante :

$$E=(x-6)^2-(x-6)(64-4x)$$

1-Développer, réduire et ordonner E.

2-Factoriser E.

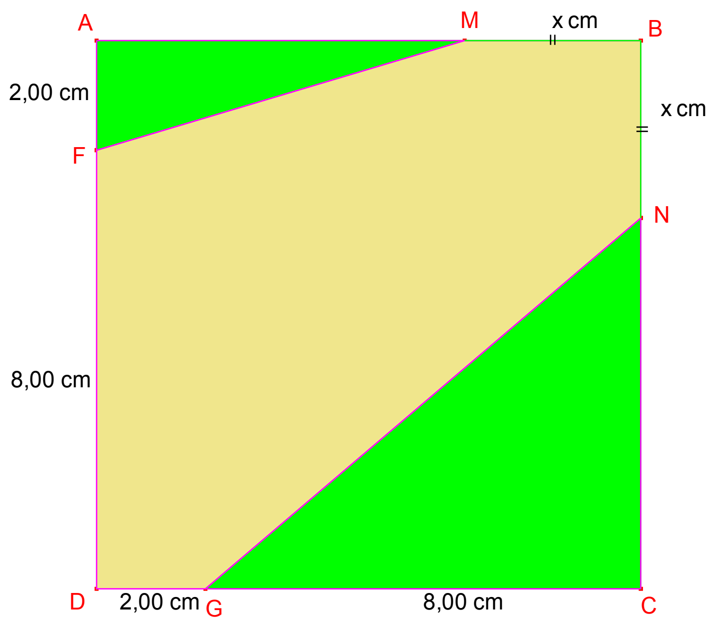
3-Calculer E lorsque x vaut $3\sqrt{2}$.

4-Résoudre l'équation $E = 0$.

Problème :

Un architecte doit aménager une parcelle carrée de 10 m de côté. Il se fixe des objectifs artistiques et esthétiques : deux triangles herbeux à deux coins du terrain séparés par une zône centrale gravillonnée. Il hésite seulement sur les distances à mettre en oeuvre. Voici ce problème traduit en termes mathématiques.

Partie A :



On considère un carré ABCD de 10 cm de côté. Les points F et G sont deux points fixes des côtés [AD] et [DC]. M et N sont des points mobiles des côtés [AB] et [BC], situés à une même distance variable du point B notée x, conformément à la figure ci-contre.

1-Tracer une figure lorsque x vaut 7 cm. Combien mesure alors le segment [AM] ? Et [NC] ? Quelle est l'aire de chacune des trois parties de ce carré ?

2-Pour des raisons esthétiques, l'architecte souhaite que les deux parties triangulaires réunies aient une aire qui ne dépasse pas les deux cinquièmes de l'aire de la partie hexagonale.

a)exprimer l'aire des deux triangles en fonction de x.

b)en déduire l'aire de l'hexagone en fonction de x.

c)écrire une inéquation qui traduise le problème et la résoudre.

3-Tracer un carré ABCD de 10 cm de côté et y repasser en rouge les zônes où peuvent se trouver M et N afin de satisfaire à l'impératif esthétique.

Partie B : recherche

Si l'architecte voulait tracer les segments [FM] et [GN] parallèles, où devrait-il positionner M et N ? en d'autres termes : combien doit valoir x pour que [FM] et [GN] soient parallèles ?

Correction :

Exercice :

1-Développer, réduire et ordonner *E*.

$$E=\underbrace{(x-6)^2}_{\text{identité remarquable } n°2}\ \underbrace{-(x-6)(64-4x)}_{\text{double distributivité}}$$

$$E=x^2-12x+36-\underbrace{[64x-4x^2-384+24x]}_{\text{priorité au développement}}$$

$$E=x^2-12x+36\underbrace{-64x+4x^2+384-24x}_{\text{ensuite la soustraction}}$$

$$E=5x^2-100x+420$$

2-Factoriser *E*.

$$E=\underbrace{(x-6)}_{\text{facteur commun}}[(x-6)-(64-4x)]$$

$$E=(x-6)[x-6-64+4x]$$

$$E=(x-6)(5x-70)$$

3-Calculer *E* lorsque *x* vaut $3\sqrt{2}$.

$$E=5(3\sqrt{2})^2-100\times3\sqrt{2}+420$$

$$E=5\times9\times2-300\sqrt{2}+420$$

$$E=510-300\sqrt{2}$$

4-Résoudre l'équation *E* = 0.

$$(x-6)(5x-70)=0$$

Ce produit est nul si l'un de ses facteurs l'est :

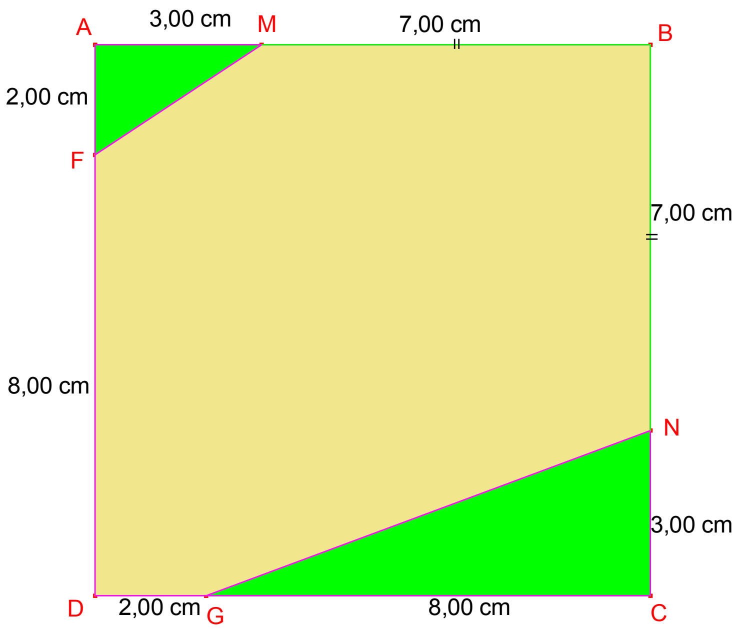
soit $x-6=0$ c'est-à-dire $x=6$

soit $5x-70=0$ c'est-à-dire $x=14$

L'équation a deux solutions : 6 et 16.

Problème

Partie A :



1-Lorsque x vaut 7 (cm)
Il est très simple de dire que les segments [AM] et [CN] mesurent 3 cm.

L'aire du triangle AFM :

$$Aire=\frac{2\times3}{2}=3\,cm^2$$

L'aire du triangle GNC :

$$Aire=\frac{8\times3}{2}=12\,cm^2$$

L'aire de l'hexagone : c'est l'aire restant du carré quand on a décompté les deux triangles précédents :

$$Aire=10\times10-3-12=85\,cm^2$$

2-Revenons au cas général où les points M et N ne sont pas fixés, mais dont la position dépende de la valeur de *x* :

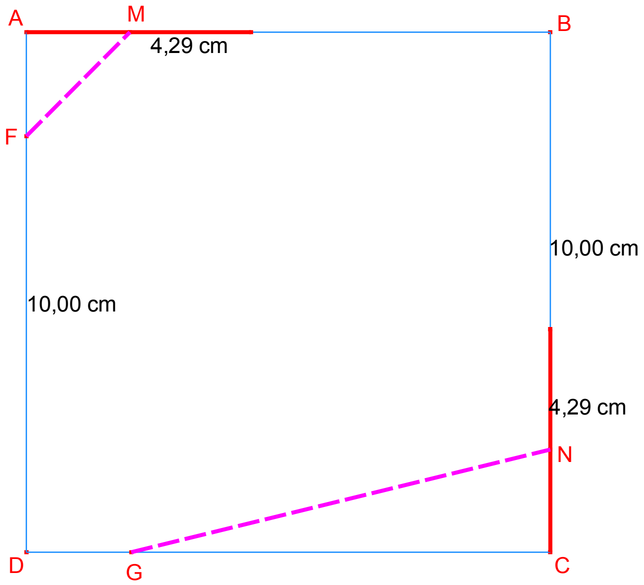
a) $A_{AFM}=AF\times AM\div2=2\times(10-x)\div2=10-x$

$$A_{GNC}=GC\times NC\div 2=8\times(10-x)\div 2=4(10-x)=40-4x$$

b) $$A_{FMBNGD}=A_{carré}-A_{AFM}-A_{GNC}=100-(10-x)-(40-4x)=50+5x$$

c)L'inéquation $A_{AFM}+A_{GNC}<\frac{2}{5}\times A_{FMBNGD}$ donne en remplaçant :

$$(10-x)+(40-4x)<\frac{2}{5}\times(50+5x)$$
$$50-5x<20+2x$$
$$30<7x$$
$$x>\frac{30}{7} \qquad \left(\frac{30}{7}\approx 4{,}29\right)$$



En rouge : les zônes où peuvent se trouver M et N.

Partie B :

Pour faire simple, observons les angles alternes-internes $\widehat{AMF}$ et $\widehat{NGC}$:

Lorsque les droites (FM) et (GN) sont parallèles, ces deux angles sont de même mesure. La valeur de leur tangente est donc identique :

$\tan(\widehat{AMF})=\tan(\widehat{NGC})$ (dans les triangles AMF et NGC rectangles en A et C)

ce qui donne :

$$\frac{AF}{AM}=\frac{NC}{GC}$$

soit :

$$\frac{2}{10-x}=\frac{10-x}{8}$$

effectuons les produits en croix :

$$(10-x)\times(10-x)=2\times 8$$
$$100-20x+x^2=16$$
$$100-20x+x^2-16=0$$
$$x^2-20x+84=0$$

Il est temps de regarder l'expression de l'exercice : $E=5x^2-100x+420$ et de se rendre compte que $E=5\times(x^2-20x+84)$. L'équation $x^2-20x+84=0$ a donc les deux solutions 6 et 14, celles de l'équation E = 0. Or, x représente ici la distance du point M au point B, distance qui ne peut dépasser 10 cm. La seule solution valide pour ce problème est donc 6.

Méthode alternative :

Suivons les instructions proposées à cette page : ici.

Commençons par la longueur HB :
les triangles AMF et MHB sont proportionnels (à cause des parallèles) donc on peut écrire l'égalité des trois rapports suivante (Thalès) :

$$\frac{MA}{MB}=\frac{MF}{MH}=\frac{AF}{BH}$$

avec les deux rapports extrêmes, on obtient :

$$BH=\frac{AF\times MB}{MA}=\frac{2\times x}{10-x}$$

Donc le côté [HN] du quadrilatère FHNK mesure $\frac{2x}{10-x}+x$

Poursuivons par la longueur DK :
les triangles DGK et GNC sont aussi proportionnels. De la même manière on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{DG}{GC}=\frac{GK}{GN}=\frac{DK}{NC}$$

en éliminant le rapport central, on obtient :

$$DK=\frac{(10-x)\times 2}{8}=\frac{10-x}{4}$$

Donc le côté [KF] du quadrilatère FHNK mesure $\frac{10-x}{4}+8$

Écrivons maintenant l'équation traduisant l'égalité des longueurs HN et KF :

$$\frac{2x}{10-x}+x=\frac{10-x}{4}+8$$

$$\frac{2x}{10-x}+\frac{x}{1}=\frac{10-x}{4}+\frac{8}{1}$$

on réduit au même dénominateur :

$$\frac{2x}{10-x}+\frac{x\times(10-x)}{1\times(10-x)}=\frac{10-x}{4}+\frac{8\times 4}{1\times 4}$$

$$\frac{2x}{10-x}+\frac{10x-x^2}{10-x}=\frac{10-x}{4}+\frac{32}{4}$$

on réduit chaque membre :

$$\frac{12x-x^2}{10-x}=\frac{42-x}{4}$$

on effectue maintenant les produits en croix :

$$4\times(12x-x^2)=(10-x)\times(42-x)$$

on développe :

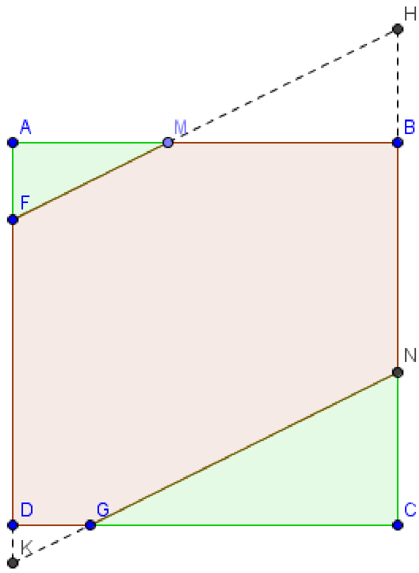
$$48x-4x^2=420-10x-42x+x^2$$

on transpose tous les nombres dans le même membre :

$$5x^2-100x+420=0$$

on reconnaît ici la forme développée de E, l'expression de l'exercice : l'équation est donc $E = 0$. Elle a deux solutions qui sont 6 et 14. Or, x représente ici la distance du point M au point B, distance qui ne peut dépasser 10 cm. La seule solution valide pour ce problème est donc 6.

Les droites (FM) et (GN) sont donc parallèles lorsque M et N sont à 6 cm de B.



AM = 4 et MB = 6

http://MaloMatic.free.fr