DM 8 de Mathématiques

3°4
pour le lundi 21 janvier 2008

Exercice 1 : Racine carrée et trigonométrie

Sur une feuille de papier millimétré, tracer un repère (O, I, J) orthonormé, en prenant deux centimètres comme unité de longueur. Dans ce repère, placer très précisément les points suivants :

$$A(1;4),\quad B\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)\ ,\quad C\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)\quad \text{et } D(1;1).$$

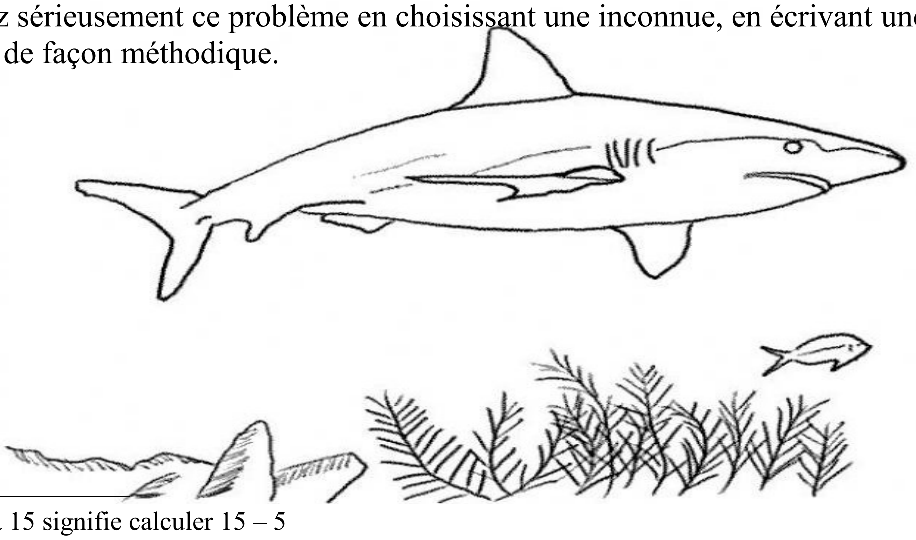
Rq : Uniquement pour tracer la figure, on pourra s'aider d'une calculatrice pour obtenir des valeurs approchées des coordonnées des points. MAIS : par la suite, plus aucune valeur approchée ne devra être utilisée ; on ne devra utiliser que des valeurs exactes simplifiées en utilisant les règles de calcul sur les fractions, les racines carrées, les identités remarquables...

1-Après avoir calculé les valeurs exactes simplifiées des longueurs AB, AC et BC, déduire la nature du triangle ABC.
2-Soit H le milieu du segment [AB]. Pourquoi le triangle AHC est-il rectangle en H ? Combien mesure chacun de ses angles ? Expliquer. Enfin, calculer les coordonnées de H.
3-Déterminer les longueurs AH et CH. On donnera une valeur exacte simplifiée de ces longueurs.
4-En considérant le triangle AHC, déterminer la valeur exacte de cos(60°), de sin(60°) et de tan(60°) ; simplifier au maximum ces valeurs.
5-Démontrer que D est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Exercice 2 :

Pince-mi et Pince-moi sont sur un bateau, et ils jouent à des jeux idiots. Soudain, ils voient des requins. Pince-mi, pris de panique, se met à calculer à tout-va. Il triple le nombre de requins, ajoute six avant de calculer le carré de la somme. Pince-moi, quant à lui, retranche le quintuple du nombre de requin à 2[*] avant d'en calculer le carré. Comme par hasard, Pince-mi et Pince-moi trouvent le même résultat à leurs calculs, et Pince-mi tombe à l'eau ! Par combien de requins Pince-mi va-t-il se faire attaquer ? Qui reste-t-il sur le bateau ?

Vous résoudrez sérieusement ce problème en choisissant une inconnue, en écrivant une équation et en la résolvant de façon méthodique.

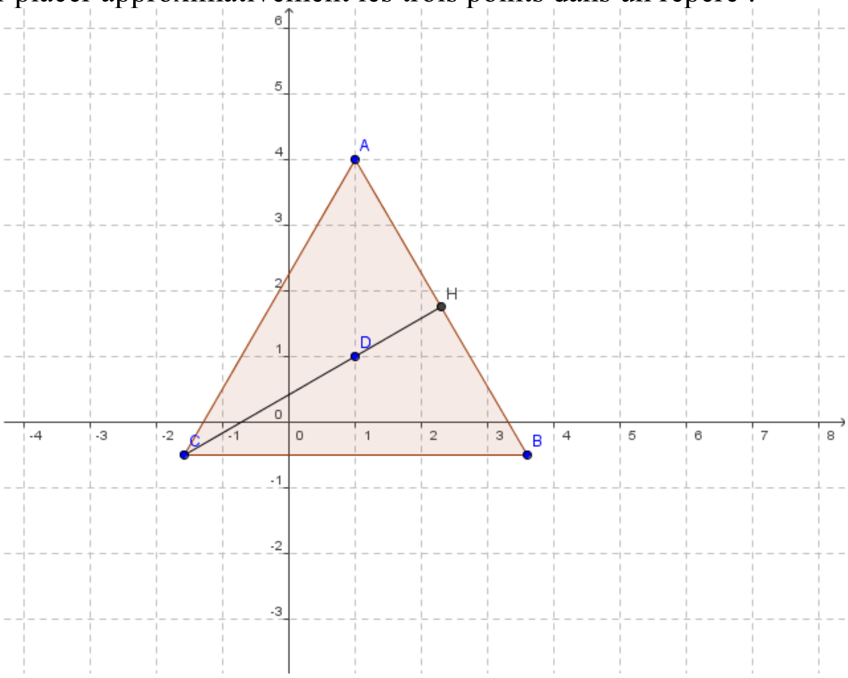


* Retrancher 5 à 15 signifie calculer 15 – 5

Correction :

Exercice 1 :

Commençons par placer approximativement les trois points dans un repère :



$$A(1;\,4),\quad B\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)\quad,\quad C\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)\quad \text{et } D(1;\,1)$$

Les coordonnées de B et de C peuvent paraître rébarbatives, mais les calculs se simplifient très vite pour donner des formules relativement simples, comme nous allons le voir maintenant.

1-Longueurs des côtés du triangle :

$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$
$$AB^2=\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{-1}{2}-4\right)^2$$
$$AB^2=\frac{9\times 3}{4}+\left(\frac{-9}{2}\right)^2$$
$$AB^2=\frac{27}{4}+\frac{81}{4}$$
$$AB^2=\frac{108}{4}$$
$$AB=\sqrt{\frac{108}{4}}=\frac{\sqrt{36\times 3}}{\sqrt{4}}=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

de même :

$$AC^2=(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2$$
$$AC^2=\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{-1}{2}-4\right)^2$$
$$AC^2=\frac{108}{4}$$
$$AC=3\sqrt{3}$$

enfin : $BC^2=(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2$

$$BC^2=\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{2}-1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)\right)^2$$

$$BC^2=\left(\frac{-6\sqrt{3}}{2}\right)^2+0^2$$
$$BC^2=(-3\sqrt{3})^2=9\times3=27$$
$$BC=\sqrt{27}=\sqrt{9\times3}=3\sqrt{3}$$
Le triangle ABC a trois côtés de même longueur. C'est un triangle équilatéral.

2-Le point H :

Le point H est le milieu du côté [AB] du triangle ABC. La droite (CH) passe par le sommet C et le milieu H : c'est une médiane du triangle ABC. Cependant, ABC est équilatéral. Ses droites particulières sont donc confondues : la médiane (CH) est aussi une hauteur (donc (CH) est perpendiculaire à (AB)), une médiatrice et également une bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$. Tout ceci prouve que le triangle AHC est rectangle en H.
Par ailleurs, le triangle ABC étant équilatéral, tous ses angles mesurent 60°. La droite (CH), quiest une bissectrice, crée donc deux angles de 30°. Donc : $\widehat{AHC}=90°$ $\widehat{HAC}=60°$ et $\widehat{ACH}=30°$

Coordonnées de H, milieu de [AB] :
$$x_H=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2}=1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$
$$y_H=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{4+\frac{-1}{2}}{2}=\frac{\frac{8}{2}+\frac{-1}{2}}{2}=\frac{\frac{7}{2}}{2}=\frac{7}{4}$$
donc $H\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{4};\frac{7}{4}\right)$

3-Longueurs AH et CH :

H étant le milieu du segment [AB], la longueur AH vaut la moitié de AB :
$$AH=\frac{AB}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
Pour calculer la longueur CH, nous avons le choix de la méthode, la plus simple étant bien sûr la meilleure ! On peut appliquer la formule de longueur au segment [CH]. On peut aussi appliquer la propriété de Pythagore au triangle ACH, rectangle en H. On pourra aussi trouver des formules ici ou là des formules qui donnent la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral en fonction de son côté ; mais cette méthode ne sera pas validé, puisque la formule n'est officiellement pas au programme du collège.

Avec la formule :
$$CH^2=(x_H-x_C)^2+(y_H-y_C)^2$$
$$CH^2=\left[1+\frac{3\sqrt{3}}{4}-\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2+\left[\frac{7}{4}-\left(\frac{-1}{2}\right)\right]^2$$
$$CH^2=\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}\times2}{2\times2}\right)^2+\left(\frac{7}{4}+\frac{1\times2}{2\times2}\right)$$
$$CH^2=\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2$$
$$CH^2=\frac{81\times3}{16}+\frac{81}{16}$$

$$CH^2 = \frac{81 \times 4}{16} = \frac{81}{4}$$
$$CH = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$$

Avec Pythagore :
Dans le triangle ACH, rectangle en H, on applique la propriété de Pythagore :

$$AC^2 = AH^2 + CH^2$$
$$(3\sqrt{3})^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + CH^2$$
$$27 = \frac{27}{4} + CH^2$$
$$CH^2 = 27 - \frac{27}{4} = \frac{27 \times 4}{4} - \frac{27}{4} = \frac{81}{4}$$

donc $CH = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$

Bien entendu, on trouve le même résultat !

4-Les valeurs trigonométriques exactes :

Dans le triangle ACH, rectangle en H :

- $\sin(60°) = \sin(\widehat{CAH}) = \frac{CH}{CA} = \frac{\frac{9}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(60°) = \cos(\widehat{CAH}) = \frac{AH}{CA} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$
- $\tan(60°) = \tan(\widehat{CAH}) = \frac{CH}{AH} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{9}{2} \times \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

5-D est-il le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC ?
Pour le prouver, le calcul des trois longueurs DA, DB et DC peut s'avérer fort intéressant. Mais, me direz-vous, si ces trois longueurs sont égales, elles ne prouvent pas que D est le centre du cercle inscrit, mais le centre du cercle circonscrit. Alors ? Alors le triangle ABC est équilatéral !

$$DA^2 = (1-1)^2 + (4-1)^2 \qquad DB^2 = \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{-1}{2} - 1\right)^2 \qquad DC^2 = \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{-1}{2} - 1\right)^2$$
$$DA^2 = 0 + 3^2 \qquad DB^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 \qquad DC^2 = \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2$$
$$DA = 3 \qquad DB^2 = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = \frac{36}{4} = 9 \qquad DC^2 = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = \frac{36}{4} = 9$$
$$DB = 3 \qquad DC = 3$$

D est équidistant des sommets A, B et C. C'est donc le centre du cercle circonscrit, et par la même occasion le centre du cercle inscrit, l'orthocentre et le centre de gravité du triangle ABC puisqu'il est équilatéral.

Exercice 2 :

Appelons x le nombre de requins que voient Pince-mi et Pince-moi. Naturellement, ce nombre est un entier (imaginez des demi-requins !!) et aussi un nombre positif !! (c'est combien -5 requins ?). Pour mettre ce problème en équation, remplissons ce tableau :

Pince-mi		Pince-moi	
Le nb de requins	x	Le nb de requins	x
Il le triple	$3x$	Le quintuple	$5x$
Ajoute 6	$3x+6$	Le retranche à 2	$2-5x$
Calcule le carré	$(3x+6)^2$	Calcule le carré	$(2-5x)^2$

Comme Pince-mi et Pince-moi trouvent le même résultat, c'est que les deux formules de la dernière ligne sont équivalentes. Voici donc notre équation :

$$(3x+6)^2=(2-5x)^2$$

En classe de 3°, il vaut mieux éviter de développer les produits présents dans les équations*. Il est préférable de factoriser. Pour cela, les deux carrés doivent se trouver dans le même membre de l'équation :

$$(3x+6)^2-(2-5x)^2=0$$

Nous reconnaissons ici une différence de deux carrés, du type a^2-b^2. Factorisons donc cette expression :

$$[(3x+6)-(2-5x)]\times[(3x+6)+(2-5x)]=0$$

On simplifie les crochets :

$$(3x+6-2+5x)\times(3x+6+2-5x)=0$$
$$(8x+4)\times(-2x+8)=0$$

Ce produit est nul si l'un de ses facteurs l'est :

- soit $8x+4=0$ c'est-à-dire $x=\frac{-1}{2}$
- soit $-2x+8=0$ c'est-à-dire $x=4$

L'équation a donc deux solutions, mais notre problème n'en a qu'une seule : le seul nombre entier et positif : 4.
Conclusion : il y a quatre requins.

PS : c'est Pince-moi qui reste sur le bateau...

* Cette « règle » a parfois ses limites. Quelquefois, il est plus simple de développer...