

Devoir Maison de Mathématiques n°7

pour le lundi sept janvier deux mille huit

Exercice 1 :

Anne et Patrick collectionnent les tickets de Loto® perdants. Si elle en donnait cinq à Patrick, Anne en aurait alors deux fois plus que lui ; mais si elle en donnait vingt c'est Patrick qui en aurait le double d'Anne. Combien de fois ont-ils perdu au Loto® ?

NB : Procéder par étapes, comme indiqué en leçon.

Exercice 2 :

Soit M l'expression suivante :

$$M = (2y + 4)^2 - (2y + 4)(y - 4)$$

1-Développer, réduire et ordonner M .

2-Factoriser l'expression M .

3-Résoudre l'équation $M = 0$.

4-Résoudre l'équation $M = 32$.

5-Calculer la valeur de M lorsque y vaut $5\sqrt{3}$. Donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{3}$, où a et b sont deux nombres entiers.

Problème :

Partie 1:

Dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité le centimètre, placer les quatre points suivants : A(-1 ; -3), B(5 ; -7), C(11 ; 2) et D(5 ; 6).

1-Calculer les coordonnées du milieu G du segment [AC].

2-Calculer les coordonnées du milieu K du segment [BD].

3-Quelle conclusion intermédiaire peut-on tirer des deux premières questions ?

4-Calculer les valeurs exactes des longueurs AC et BD.

5-Calculer les valeurs exactes des longueurs AB et BC.

6-En déduire la nature précise du quadrilatère ABCD.

7-Soit F le point tel que AGDF soit un parallélogramme. Calculer ses coordonnées.

8-Quelle est, en fait, la véritable nature du quadrilatère AGDF ? Justifier.

Partie 2 :

On recherche les points de l'axe des ordonnées qui pourraient être le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse [AB]. On appellera M un tel point, dont les coordonnées sont (0 ; y) puisque M est censé être un point de l'axe des ordonnées.

En reprenant les questions de la partie 2 du DM6, déterminer tous les points de l'axe des ordonnées qui satisfont à la condition.

NB : on pourra largement s'inspirer de la correction du DM6, et aussi s'aider en traçant une figure dynamique avec Geogebra.

Joyeuses Fêtes de fin d'année ! À l'année prochaine...

Correction :

Exercice 1 :

Commençons par donner des noms à nos deux inconnues : A le nombre de billets que possède Anne et P le nombre de billets de Patrick. Si on détermine A et P , on saura répondre à la question posée. Il faut maintenant écrire des équations qu'il faudra résoudre. Pour cela, procédons de façon organisée en remplissant ce tableau :

Nombre de billets	Anne	Patrick
Au début	A	P
Si Anne en donne cinq	$A-5$	$P+5$
Si Anne en donne vingt	$A-20$	$P+20$

Il reste alors à écrire les deux équations du système, en relisant et traduisant les phrases du problème :

Si elle en donnait cinq à Patrick, Anne en aurait alors deux fois plus que lui :

$$A-5=2\times(P+5)$$

Mais si elle en donnait vingt c'est Patrick qui en aurait le double d'Anne :

$$P+20=2\times(A-20)$$

Voici donc le système à résoudre :

$$\begin{cases} A-5=2\times(P+5) \\ P+20=2\times(A-20) \end{cases}$$

Commençons par développer ces deux expressions :

$$\begin{cases} A-5=2P+10 \\ P+20=2A-40 \end{cases}$$

Ensuite, on remet les inconnues dans le membre de gauche, comme à l'accoutumée :

$$\begin{cases} A-2P=10+5 \\ -2A+P=-40-20 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} A-2P=15 \\ -2A+P=-60 \end{cases}$$

Ou encore, en changeant les signes de la deuxième équation (c'est-à-dire en la multipliant par -1) :

$$\begin{cases} A-2P=15 \\ 2A-P=60 \end{cases}$$

Il reste alors à résoudre, par exemple en utilisant la méthode dite par combinaison. Doublons la première équation. On obtient :

$$\begin{cases} 2A-4P=30 \\ 2A-P=60 \end{cases}$$

Effectuons la différence entre ces deux équations (éq.2 - éq.1) :

$$\begin{aligned} (2A-P)-(2A-4P) &= 60-30 \\ 2A-P-2A+4P &= 30 \\ 3P &= 30 \\ \text{donc } P &= 10 \end{aligned}$$

Il reste à trouver A . Le plus rapide consiste ici à utiliser l'équation $A-2P=15$ où on remplace P par sa valeur : $A-2\times 10=15$ soit $A-20=15$ donc $A=35$.

On vérifie en remplissant à nouveau le tableau :

Nombre de billets	Anne	Patrick	Bilan
Au début	35	10	
Si Anne en donne cinq	$35-5=30$	$10+5=15$	Anne en aurait bien le double de Patrick
Si Anne en donne vingt	$35-20=15$	$10+20=30$	Patrick en aurait bien le double d'Anne

On voit que c'est conforme à l'énoncé. Ils ont donc perdu ensemble 45 fois au Loto®.

Exercice 2 :

Soit M l'expression suivante :

$$M = (2y + 4)^2 - (2y + 4)(y - 4)$$

1-Développer, réduire et ordonner M .

$$M = (2y)^2 + 2 \times 2y \times 4 + 4^2 - (2y \times y - 2y \times 4 + 4 \times y - 4 \times 4)$$

$$M = 4y^2 + 16y + 16 - 2y^2 + 8y - 4y + 16$$

$$M = 2y^2 + 20y + 32$$

2-Factoriser l'expression M .

$$M = (2y + 4)[(2y + 4) - (y - 4)]$$

$$M = (2y + 4)(y + 8)$$

3-Résoudre l'équation $M = 0$.

On utilise l'expression factorisée de M :

$$(2y + 4)(y + 8) = 0 \quad \text{si l'un ou l'autre des facteurs est nul :}$$

$$\text{*soit } 2y + 4 = 0, \text{ c'est-à-dire } y = -2$$

$$\text{*soit } y + 8 = 0 \text{ c'est-à-dire } y = -8$$

L'équation $M = 0$ admet donc deux solutions : - 2 et - 8.

4-Résoudre l'équation $M = 32$.

On utilise ici l'expression développée de M puisqu'elle contient la valeur 32 (c'est un indice !!) :

$$2y^2 + 20y + 32 = 32$$

$$2y^2 + 20y = 32 - 32$$

$$2y^2 + 20y = 0$$

Factorisons cette expression :

$$2y \times (y + 10) = 0 \quad \text{Ce produit est nul si l'un ou l'autre des facteurs est nul :}$$

$$\text{*soit } 2y = 0, \text{ c'est-à-dire } y = 0$$

$$\text{*soit } y + 10 = 0 \text{ c'est-à-dire } y = -10$$

L'équation $M = 32$ admet donc deux solutions : 0 et - 10.

5-Calculer la valeur de M lorsque y vaut $5\sqrt{3}$. Donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{3}$, où a et b sont deux nombres entiers.

Il faut choisir une des expressions de M ; par exemple l'expression développée :

$$M = 2y^2 + 20y + 32$$

$$M = 2 \times (5\sqrt{3})^2 + 20 \times (5\sqrt{3}) + 32$$

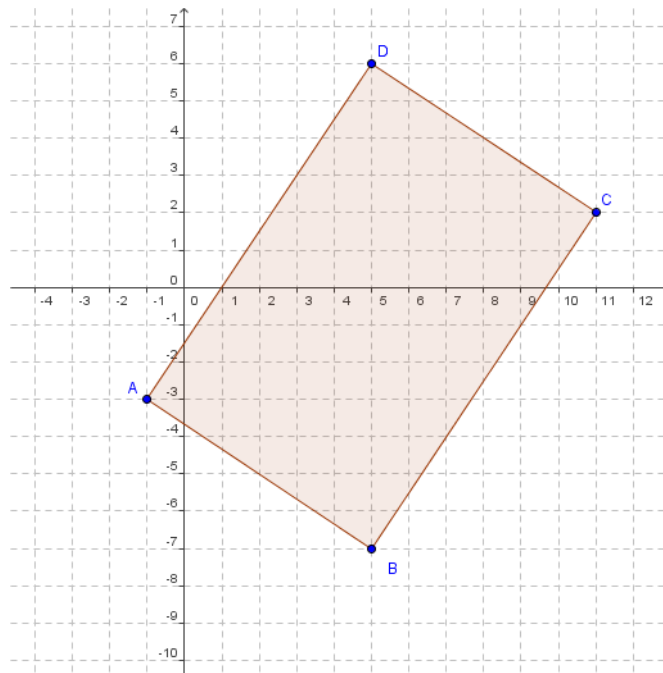
$$M = 150 + 100\sqrt{3} + 32$$

$$M = 182 + 100\sqrt{3}$$

Problème :

Partie 1 :

Dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité le centimètre, placer les quatre points suivants : A(-1 ; -3), B(5 ; -7), C(11 ; 2) et D(5 ; 6).



1-Calculer les coordonnées du milieu G du segment [AC].

$$x_G = \frac{x_A + x_C}{2} \quad y_G = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$x_G = \frac{-1 + 11}{2} \quad y_G = \frac{-3 + 2}{2}$$

$$x_G = 5 \quad y_G = \frac{-1}{2}$$

donc G a pour coordonnées $\left(5; -\frac{1}{2}\right)$

2-Calculer les coordonnées du milieu K du segment [BD].

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2} \quad y_K = \frac{y_B + y_D}{2}$$

$$x_K = \frac{5 + 5}{2} \quad y_K = \frac{-7 + 6}{2}$$

$$x_K = 5 \quad y_K = \frac{-1}{2}$$

donc K a pour coordonnées $\left(5; -\frac{1}{2}\right)$

3-Quelle conclusion intermédiaire peut-on tirer des deux premières questions ?

G et K ont les mêmes coordonnées ; ils sont donc superposés. Les deux diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD ont donc le même milieu (K ou G) ; c'est donc déjà un parallélogramme. Est-il

plus qu'un parallélogramme ?

4-Calculer les valeurs exactes des longueurs AC et BD.

$$\begin{aligned} AC^2 &= (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 & BD^2 &= (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 \\ AC^2 &= (11 - (-1))^2 + (2 - (-3))^2 & BD^2 &= (5 - 5)^2 + (6 - (-7))^2 \\ AC^2 &= 12^2 + 5^2 & BD^2 &= 0 + 13^2 \\ AC^2 &= 144 + 25 & BD^2 &= 169 \\ AC^2 &= 169 & BD &= \sqrt{169} \\ AC &= \sqrt{169} & BD &= 13 \\ AC &= 13 \end{aligned}$$

Les diagonales [AC] et [BD] ont la même longueur. Le parallélogramme ABCD est donc aussi un rectangle. Est-il plus qu'un rectangle ?

5-Calculer les valeurs exactes des longueurs AB et BC.

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 & BC^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \\ AB^2 &= (5 - (-1))^2 + (-7 - (-3))^2 & BC^2 &= (11 - 5)^2 + (2 - (-7))^2 \\ AB^2 &= 6^2 + (-4)^2 & BC^2 &= 6^2 + 9^2 \\ AB^2 &= 36 + 16 & BC^2 &= 36 + 81 \\ AB^2 &= 52 & BC^2 &= 117 \\ AB &= \sqrt{52} & BC &= \sqrt{117} \\ AB &= \sqrt{4 \times 13} & & \\ AB &= 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

6-En déduire la nature précise du quadrilatère ABCD.

Les deux côtés consécutifs [AB] et [BC] du rectangle n'étant pas de la même longueur, ce n'est pas un carré. ABCD est donc un rectangle.

7-Soit F le point tel que AGDF soit un parallélogramme. Calculer ses coordonnées.

AGDF devant être un parallélogramme, ses diagonales [AD] et [GF] doivent avoir le même milieu. Appelons N ce milieu et calculons ses coordonnées :

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{x_A + x_D}{2} & y_N &= \frac{y_A + y_D}{2} \\ x_N &= \frac{-1 + 5}{2} & y_N &= \frac{-3 + 6}{2} \\ x_N &= 2 & y_N &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

donc N a pour coordonnées $\left(2; \frac{3}{2}\right)$

Maintenant, on détermine les coordonnées de F en utilisant le fait que N est le milieu de [GF] :

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{x_G + x_F}{2} & y_N &= \frac{y_G + y_F}{2} \\ 2 &= \frac{5 + x_F}{2} & \frac{3}{2} &= \frac{-1 + y_F}{2} \\ 2 \times 2 &= 5 + x_F & 3 &= \frac{-1}{2} + y_F \\ x_F &= -1 & y_F &= 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Donc les coordonnées de F sont $\left(-1; \frac{7}{2}\right)$

8-Quelle est, en fait, la véritable nature du quadrilatère AGDF ? Justifier.

G étant le milieu des diagonales [AC] et [BD] du rectangle ABCD, les longueurs AG et GC sont égales (puisque les diagonales du rectangle ont la même longueur, les demi-diagonales aussi). Par conséquent, les deux côtés consécutifs [AG] et [GD] du parallélogramme AGDF ont la même longueur. C'est donc un losange.

Partie 2 :

On recherche les points de l'axe des ordonnées qui pourraient être le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse [AB]. On appellera M un tel point, dont les coordonnées sont (0 ; y) puisque M est censé être un point de l'axe des ordonnées.

En reprenant les questions de la partie 2 du DM6, déterminer tous les points de l'axe des ordonnées qui satisfont à la condition.

J'invite tous ceux qui ne l'ont pas encore fait à cliquer sur [ce lien](#) pour visualiser la situation de ce problème, et comprendre que nous recherchons l'ordonnée du point M qui est tel que le triangle ABM est rectangle en M.

Longueur AB :

cette longueur est déjà calculée. Elle vaut $AB^2=52$ (seul le carré nous intéresse, car qui dit triangle rectangle dit Pythagore, donc carré de longueur).

Longueur AM :

$$\begin{aligned}AM^2 &= (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 \\AM^2 &= (0 - (-1))^2 + (y_M - (-3))^2 \\AM^2 &= 1 + (y_M + 3)^2\end{aligned}$$

je développe avec la première identité remarquable :

$$\begin{aligned}AM^2 &= 1 + y_M^2 + 6y_M + 9 \\AM^2 &= y_M^2 + 6y_M + 10\end{aligned}$$

Longueur BM :

$$\begin{aligned}BM^2 &= (x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2 \\BM^2 &= (0 - 5)^2 + (y_M - (-7))^2 \\BM^2 &= 25 + (y_M + 7)^2\end{aligned}$$

je développe avec la première identité remarquable :

$$\begin{aligned}BM^2 &= 25 + y_M^2 + 14y_M + 49 \\BM^2 &= y_M^2 + 14y_M + 74\end{aligned}$$

Le triangle ABM doit être rectangle en M. On doit donc avoir $AM^2 + BM^2 = AB^2$ (c'est la propriété de Pythagore) ; ce qui se traduit par :

$$(y_M^2 + 6y_M + 10) + (y_M^2 + 14y_M + 74) = 52$$

$$\text{donc : } 2y_M^2 + 20y_M + 84 = 52$$

$$\text{soit : } 2y_M^2 + 20y_M + 84 - 52 = 0$$

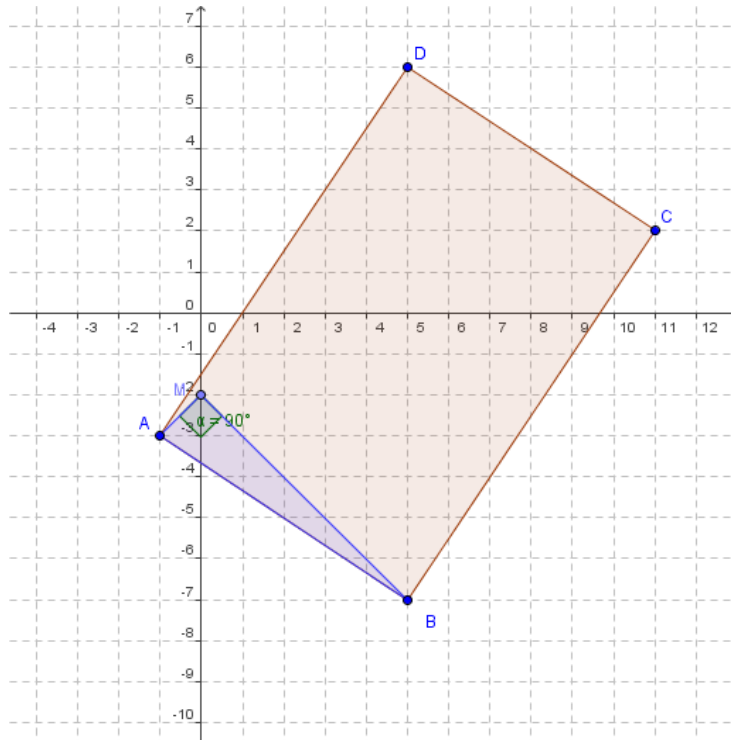
$$2y_M^2 + 20y_M + 32 = 0$$

On reconnaît évidemment dans le membre de gauche de cette équation l'expression développée de

l'expression M de l'exercice 2. Cette équation est donc déjà résolue ($M=0$). Elle a deux solutions :
soit $y_M = -2$ soit $y_M = -8$. Il y a donc deux points M qui répondent aux conditions :

$$M_1(0; -2) \quad \text{et} \quad M_2(0; -8)$$

cas 1 :



cas 2 :

